9.3　曲面积分

9.3.1 对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

9.3.2 对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）

9.3.3 两类曲面积分之间的联系

直细棒的质量 $m = \int_a^b f(x)dx$

平面薄片的质量 $m = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

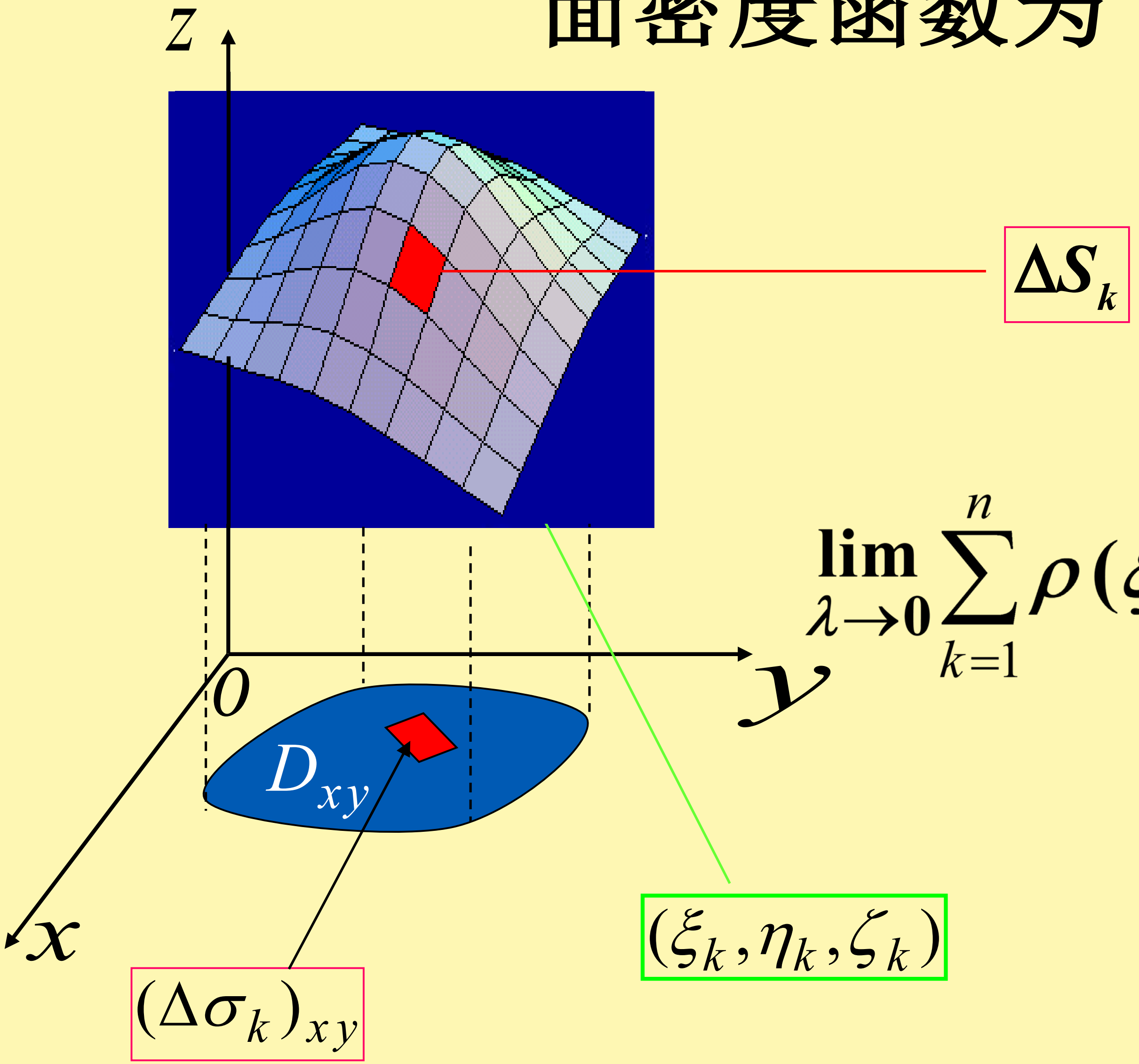
空间物体的质量 $m = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$

曲线型构件的质量

$$m = \int_{\mathrm{L}} f(x,y)ds,\quad m = \int_\Gamma f(x,y,z)ds$$

曲面型构件的质量 ?

面密度函数为 $\rho(x,y,z)$



$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

9.3.1 对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

定义9.3.1

设Σ为光滑曲面，$f(x,y,z)$是定义在 Σ 上的有界函数，若对Σ做任意分割和局部区域任意取点，"乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

都存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分或第一类曲面积分。其中 $f(x,y,z)$叫做被积函数， Σ 叫做积分曲面。

据此定义，曲面形构件的质量为

$$M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似。

- 积分的存在性 若 $f(x,y,z)$在光滑曲面 Σ 上连续，

则对面积的曲面积分存在。

- 对积分域的可加性 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma}\left[k_1 f(x,y,z) + k_2 g(x,y,z)\right]\mathrm{d}S$$

$$= k_1 \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + k_2 \iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

对面积的曲面积分的计算法

定理 设有光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续，则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$ 存在，且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\ 2}(x,y)+z_y^{\ 2}(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1）计算方法可概括为“一代、二换、三投影，曲面积分化为二重积分”。

“一代”将 $z=z(x,y)$ 代入被积函数 $f(x,y,z)$，

得 $f(x,y,z(x,y))$；

“二换”将 dS 换成相应的曲面面积元素的表达式：

如 $\Sigma: z=z(x,y)$，则

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

“三投影”认清 Σ 在 xoy 平面上的投影区域 D_{xy}，二重积分是在区域 D_{xy} 上进行的。

2) 如果曲面方程为

$$x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

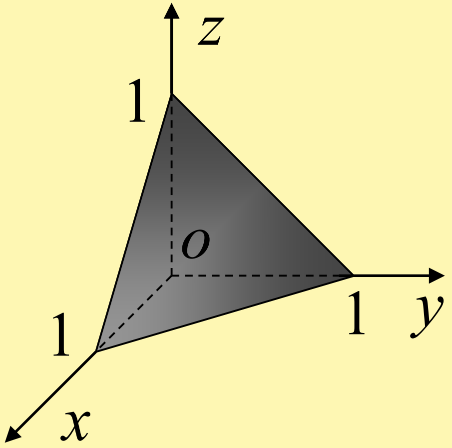
$$= \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y{}^2(y,z)+x_z{}^2(y,z)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

如果曲面方程为

$$y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$$

有类似的公式.

例1 计算$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解 设 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 分别表示Σ 在平面 $z=0, y=0, x=0, x+y+z=1$上的部分, 则

$$原式 =\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}+\iint_{\Sigma_4}\right)xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_1: z=0,\quad D_{xy}: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$$

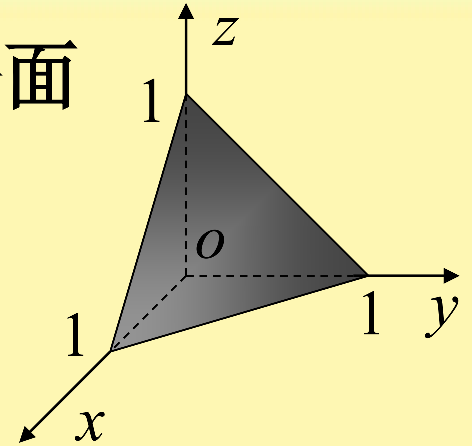
$$\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} xy\cdot 0\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=0$$

$$\Sigma_2: y=0,\qquad \Sigma_3:\ x=0,$$

$$\iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}S=0=\iint_{\Sigma_3} xyz\,\mathrm{d}S$$

解 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$分别表示$\Sigma$ 在平面

$z=0, y=0, x=0, x+y+z=1$上的部分,



$$\text{原式} = \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4 : z = 1-x-y, \quad (x,y)\in D_{xy}: \begin{cases} 0\le y\le 1-x \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

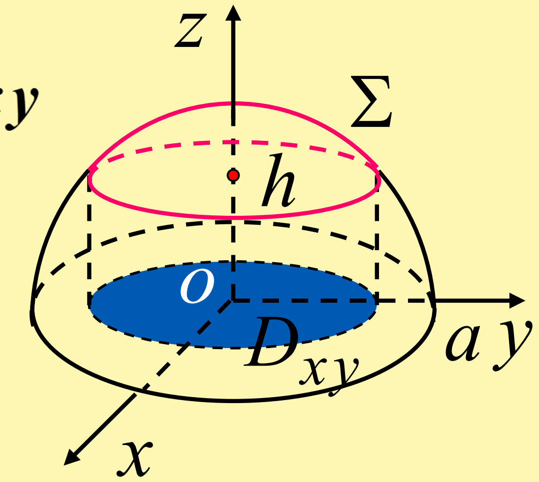
$$dS = \sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\,dxdy$$

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}/120$$

例2 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,(x,y)\in D_{xy}$



$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

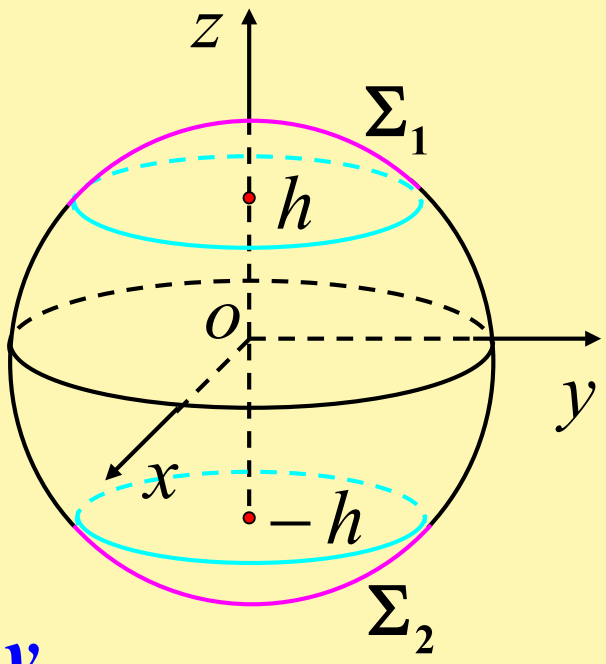
$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{a^2-r^2}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

若Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分，则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=0 \qquad \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=4\pi a\ln\frac{a}{h}$$



$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{z}+\iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{z}$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$+\iint_{D_{xy}}\frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

奇零偶倍

Σ	$f(x,y,z)$	$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$
关于 xOy 平面对称	关于z是奇函数	0
	关于z是偶函数	$2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS$
关于 yOz 平面对称	关于x是奇函数	0
	关于x是偶函数	$2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS$
关于 xOz 平面对称	关于y是奇函数	0
	关于y是偶函数	$2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS$

(2) 若 Σ关于变量x，y，z具有轮换对称性，则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma} f(y,z,x)dS = \iint_{\Sigma} f(z,x,y)dS$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)]dS$$

若Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$则

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}[x^2+y^2+z^2]dS$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} R^2 dS = \frac{4}{3}\pi R^4$$

例 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$，$\Sigma_1$为$\Sigma$在第一卦限中的部分，则有（ C ）。

$(A)\quad \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S;$

$(B)\quad \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S;$

$(C)\quad \iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S;$

$(D)\quad \iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S.$ （ 2000 考研 ）

例3 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS \quad \Sigma \quad x^2+y^2+z^2=2ax$

解 记$\Sigma_1 \quad x-a=\sqrt{a^2-z^2-y^2}$,

$\Sigma_2 \quad x-a=-\sqrt{a^2-z^2-y^2}$

则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{\pm y}{\sqrt{a^2-z^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}=\dfrac{\pm z}{\sqrt{a^2-z^2-y^2}}$

$$dS=\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2-y^2}}dydz \quad D_{yz} \quad y^2+z^2\le a^2$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}2axdS=\iint\limits_{\Sigma_1}2axdS+\iint\limits_{\Sigma_2}2axdS$$

$$= \iint_{\Sigma_1} 2a(a + \sqrt{a^2 - y^2 - z^2})dS$$

$$+ \iint_{\Sigma_2} 2a(a - \sqrt{a^2 - y^2 - z^2})dS$$

$$= \iint_{\Sigma_1} 2a^2 dS + \iint_{\Sigma_2} 2a^2 dS + \iint_{\Sigma_1} 2a\sqrt{a^2 - y^2 - z^2})dS$$

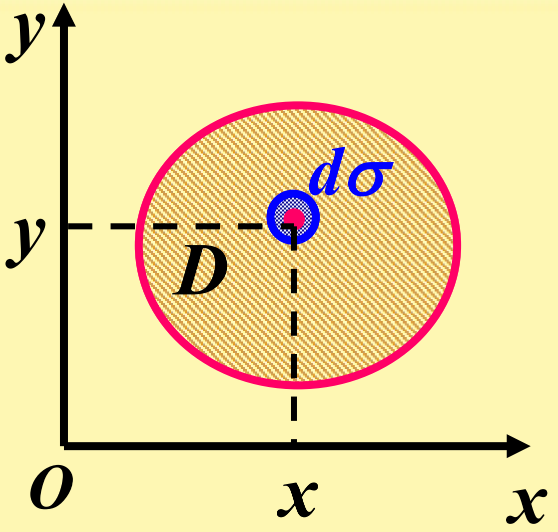
$$- \iint_{\Sigma_2} 2a\sqrt{a^2 - y^2 - z^2})dS$$

$$= 2a^2\left[\iint_{\Sigma_1} dS + \iint_{\Sigma_2} dS\right] = 2a^2 \cdot 4\pi a^2 = 8\pi a^4$$

$$dS = \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2 - y^2}} dydz$$

复习：平面薄片的质心$(\bar{x},\bar{y})$为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}$$



M_y为平面薄板对y轴的静力矩$\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma=\iint\limits_D xdm$

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)dv}{M}\qquad \bar{x}=\frac{\int_L x\rho ds}{\int_L \rho ds}$$

$$\bar{x}=\frac{\iint_\Sigma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$$

例3 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS \quad \Sigma \quad x^2+y^2+z^2=2ax$

解法二： $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_{\Sigma}2axdS$

$=2a\overline{x}\cdot S \; =2a\cdot a\cdot 4\pi a^2$

$=8\pi a^4$

利用形心公式

$$\overline{x}=\frac{\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S}$$

解法三： 用奇零偶倍？

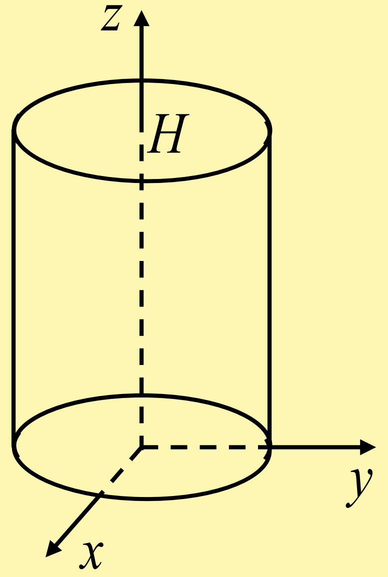
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{2}(x,y)+z_y^{2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

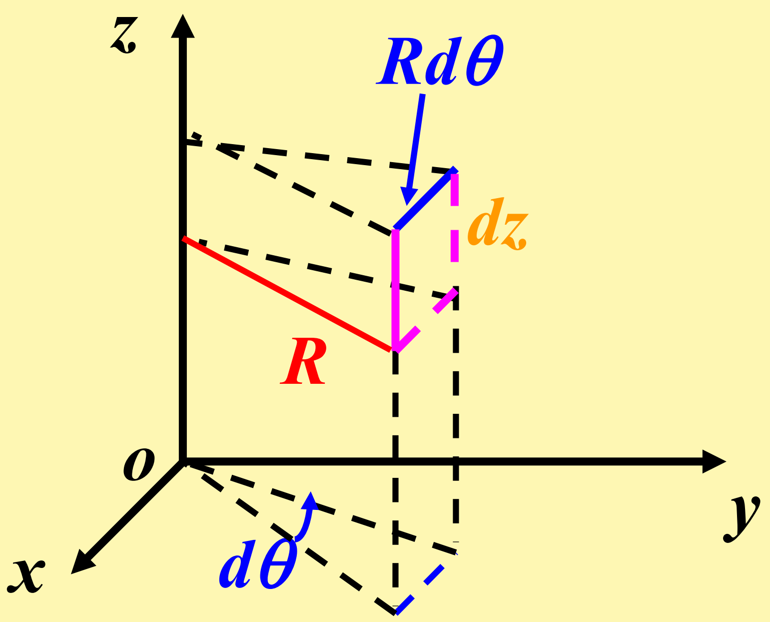
3)若曲面为参数方程, 只要求出在参数意义下$\mathrm{d}S$的表达式, 也可将对面积的曲面积分转化为对参数的二重积分。

半径为R的柱面: $x^2+y^2=R^2$

柱面坐标: $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \\ z=z \end{cases}$



$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



为了把变量从直角坐标变换为柱面坐标，用二组坐标平面$z=$常数，$\theta=$常数把曲面分成许多小闭区域。

考虑由z,θ各取得微小增量$dz,d\theta$所成的小区域。不计高阶无穷小，可把这个区域看作长方形。

柱面的面积元素 $dS = Rdzd\theta$

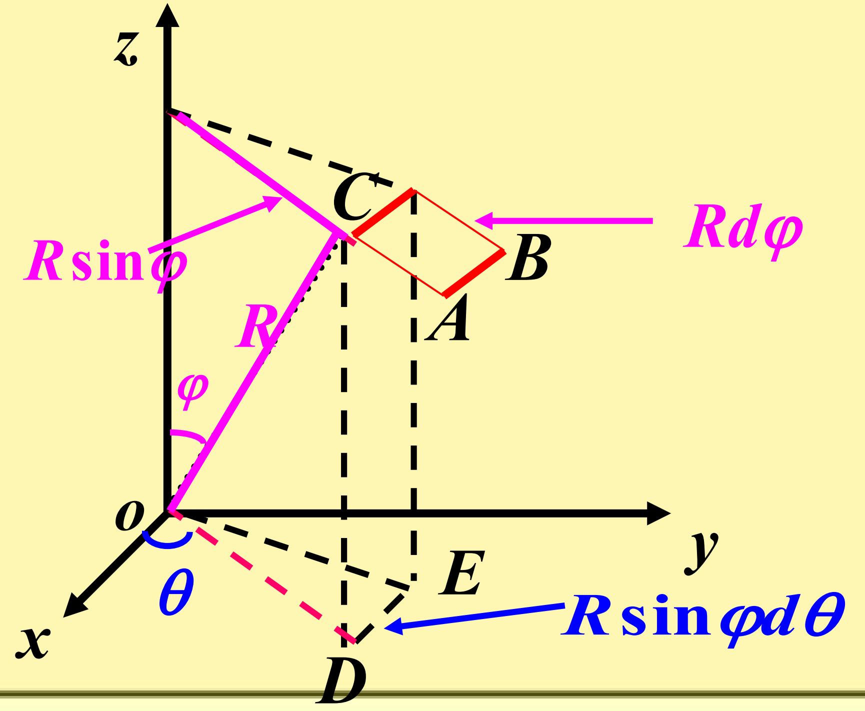
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D} f(R\cos\theta, R\sin\theta, z)\,R\,dzd\theta$$

半径为R的球面$x^2+y^2+z^2=R^2$

球面坐标：
$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

为了把变量从直角坐标变换为球面坐标，用二组坐标平面φ=常数，θ=常数，把曲面分成许多小闭区域。

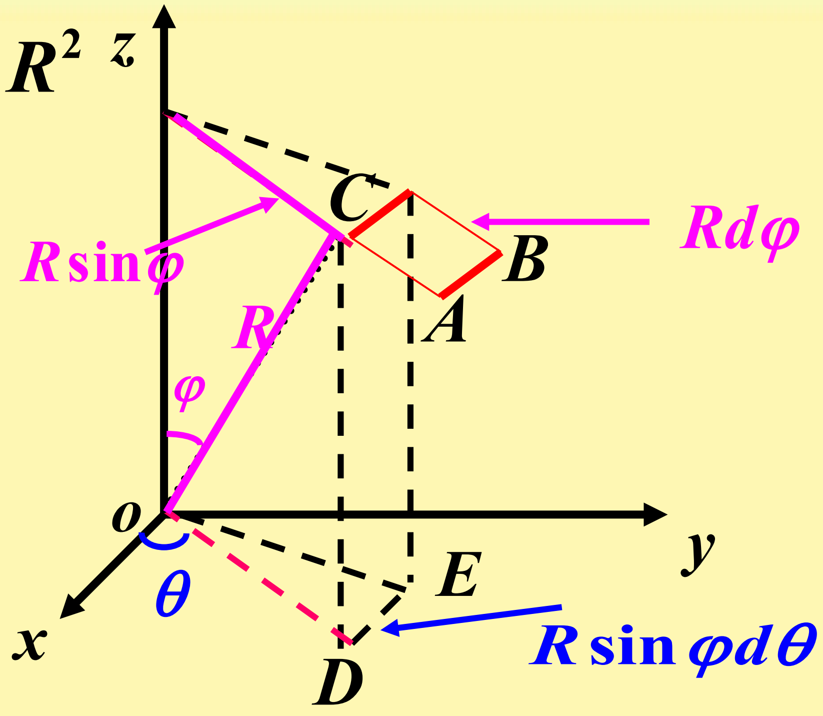
考虑由φ,θ各取得微小增量$d\varphi,d\theta$所成的区域。
不计高阶无穷小，可把这个区域看作长方形。



半径为R的球面$x^2+y^2+z^2=R^2$

球面坐标：

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$



经线方向的长为 $Rd\varphi$，纬线方向的宽为 $R\sin\varphi d\theta$，

球面的面积元素 $dS = R^2\sin\varphi d\varphi d\theta$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D} F(\varphi,\theta) R^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi d\theta$$

$$F(\varphi,\theta) = f(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$$

例4 求半径为R 的均匀半球壳 Σ 的质心。

解 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知质心的坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$,而

$$\bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S}$$

$$=\frac{R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{2\pi R^2}$$

$$=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$$ $\therefore$ 质心$(0,0,\frac{R}{2})$

用球面坐标

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta \\ y=R\sin\varphi\sin\theta \\ z=R\cos\varphi \end{cases}$$

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

解法一：见教材

例5 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$ 其中Σ是介于平面

$z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$

解法一： $\Sigma: x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$

Σ关于平面yOz对称，$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$关于变量x为偶函数

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{\Sigma_1}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{\Sigma_1}\frac{dS}{R^2+z^2}$$

其中 $\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$ $(-R\leqslant y\leqslant R,\ 0\leqslant z\leqslant H)$

$$I = 2\iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{R^2 + z^2},$$

$$\Sigma_1 : x = \sqrt{R^2 - y^2} \quad (-R \leqslant y \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant H)$$

$$dS = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dydz = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dydz$$

$$I = 2\iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dydz$$

$$= 2R\int_{-R}^{R} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \int_0^H \frac{dz}{R^2 + z^2}$$

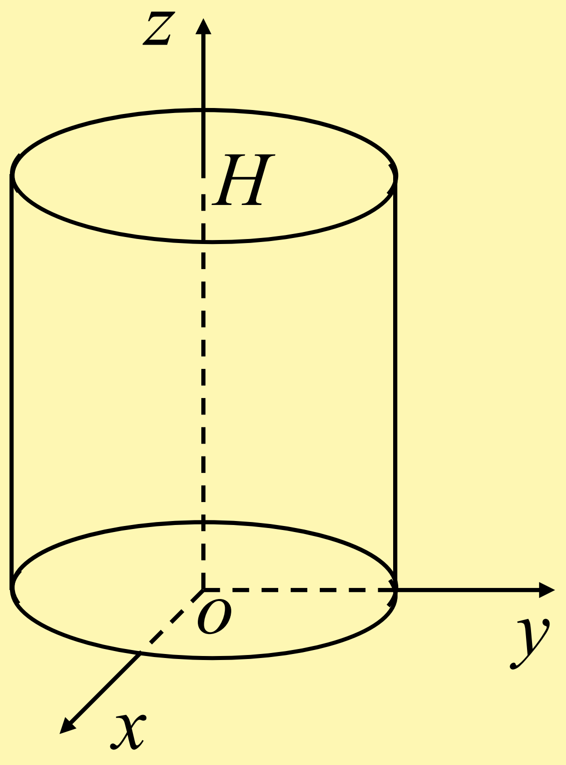
$$= 2\arctan\frac{H}{R} \cdot 2\arcsin\frac{R}{R} = 2\pi \arctan\frac{H}{R}$$

例5 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{\Sigma_1}\frac{dS}{R^2+z^2}$

解法一中将曲面分为前后(或左右)两片,计算较繁。

解法二　柱面坐标

$$\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \mathrm{d}S=R\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$$



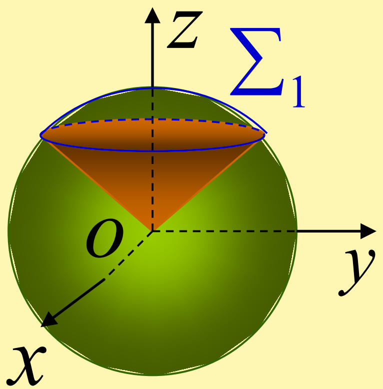
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{H}\frac{R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

例6 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当} z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{当} z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

计算 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$



解： 设Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分,

$$I=\iint_{\Sigma_1} \quad +0=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

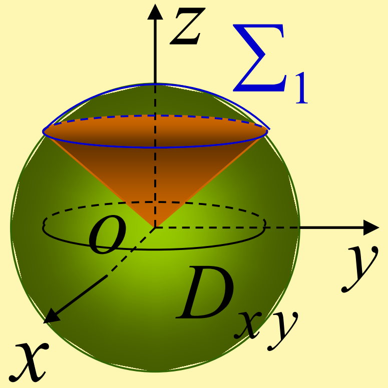
锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的

交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2,\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$ 它在 xoy 面上的

投影域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\right\}$

$$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \qquad dS=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分,它在 xoy 面上的投影域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\right\}$,

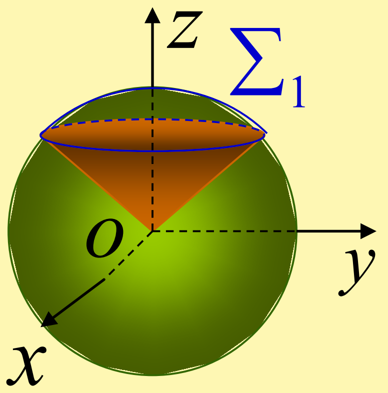


$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a}\frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{6}\pi a^4(8-5\sqrt{2})$$

球面坐标: $\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$



球面的面积元素 $dS = a^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$

解法二: 设Σ_1为上半球面夹于锥面间的部分, 则

$$I = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin^2\varphi \cdot a^2 \sin\varphi d\varphi$$

$$= -2\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2\varphi) d(\cos\varphi) = \frac{1}{6}\pi a^4 (8 - 5\sqrt{2})$$

内容小结

1. 定义 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算：　设 $\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（曲面的其他两种情况类似）

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、质心公式简化计算的技巧.